

ΜΑΥ111: Απειροστικός Λογισμός Ι (2025-26) - Ενδιάμεση Εξέταση

Ημερομηνία: 12/11/2025

Διάρκεια: 3 ώρες

1. Δείξτε ότι:

α) Αν $x \geq -1$ τότε $(1+x)^n \geq 1+nx$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

β) Αν $a, b \geq 0$ τότε

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(1 + 1 μον.)

2. α) Δείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

β) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Δείξτε ότι υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $x < q < y$.

(1 + 1 μον.)

3. α) Βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\sup, \inf, \max, \min$ των συνόλων:

$$A = \left\{ (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup [0, 2] \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}.$$

β) Έστω A, B μη-κενά και άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $a - \varepsilon < b$.

(1 + 1 μον.)

4. α) Έστω ότι οι ακολουθίες $(a_n), (b_n)$ συγκλίνουν στους πραγματικούς αριθμούς a, b , αντίστοιχα. Δείξτε ότι αν $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $a \leq b$.

β) Δείξτε ότι αν $a > 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(1 + 1 μον.)

5. α) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες και σε περίπτωση που συγκλίνουν βρείτε το όριό τους:

$$\alpha_n = \frac{2^n \sqrt{n!}}{n^{\frac{n}{2}}} \quad \beta_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1} \quad \gamma_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 + 2^n + \dots + n^n}$$

β) Ορίζουμε αναδρομικά ακολουθία με $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εξετάστε αν η (x_n) συγκλίνει και αν ναι, προσδιορίστε το όριό της.

(3 × 0.5 + 0.5 μον.)

6. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία.

α) Δείξτε ότι ένα $x \in \mathbb{R}$ είναι οριακό σημείο της (a_n) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq m$ τέτοιο ώστε $|a_n - x| < \varepsilon$.

β) Ορίζουμε $u_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$. Δείξτε ότι η ακολουθία (u_n) είναι κάτω φραγμένη και ότι $\limsup a_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(1 + 1 μον.)

Δικαιολογήστε λεπτομερώς τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!